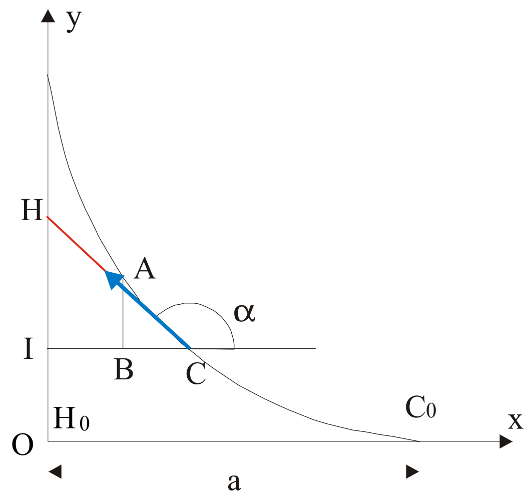
Regresso ao applet

Percurso do cão

Um homem desloca-se ao longo de **Oy** com uma velocidade constante $\mathbf{v_h}$. Para o apanhar, o seu cão, colocado inicialmente em $\mathbf{C_0}$ sobre **Ox** ($\mathbf{H_0C_0 = a}$), corre na sua direcção com uma velocidade constante $\mathbf{v_c}$. *O vector velocidade é dirigido, em permanência, para o dono do cão.*



P¹ r em Equa-«o

Sejam **x** e **y** as coordenadas de C.

$HI = v_h t - y = -IC.tg\,\alpha$.

Por hipótese, a velocidade é tangente à trajectória:

$$tg\,\alpha = y'$$

Seja: $v_h t - y = -xy'$ (1)

No triângulo ABC, $\cos\alpha = BC/AC = dx/ds$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{ds^2}{dx^2} = 1 + tg^2\alpha$$

$\mathbf{ds^2 = (1 + y'^2)dx^2}$; mas $\mathbf{ds/dt = v_c = Cte}$

$\mathbf{v_c^2dt^2 = (1 + y'^2)dx^2}$; como **dx é negativo**:

$$(1+y'^2)^{1/2} = -v_c dt/dx \qquad (2)$$

Resolução

Temos $\mathbf{K = v_c/v_h}$. Elimina-se **t** entre (1) e (2)

$$\mathbf{v_h t = y - xy'} \text{ que derivado passa a: } v_h \frac{dt}{dx} = y' - xy'' - y' = -xy''$$

$$(1+y'^2)^{1/2} = -v_c \frac{dt}{dx} = v_c \frac{xy''}{v_h} = Kxy''$$

Para resolver esta equação, assume-se $\mathbf{y' = -sh(w)}$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dw}\frac{dw}{dx} = -ch(w)\frac{dw}{dx} \quad \text{mas } : 1 + y'^2 = ch^2(w) \Rightarrow ch(w) = -Kch(w)x\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = -Kdw \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{-Kw}$$

Se $\mathbf{t = 0}$, $\mathbf{x = a}$, $\mathbf{y' = 0}$, $\mathbf{w = 0}$ então $\mathbf{C = a}$ e $\boxed{\mathbf{x = ae^{-Kw}}}$

$dy = y'dx = -sh(w)dx$. $\qquad dx = -aKe^{-Kw}\,dw$

$dy = aKe^{-Kw}\,sh(w)dw$

$$dy = \frac{aK}{2}\left[e^{(1-K)w} - e^{-(K+1)w}\right]dw$$

Depois da integração, temos: $\boxed{y = \frac{aK}{2}\left[\frac{e^{-(1+K)w}}{K+1} - \frac{e^{-(K-1)w}}{K-1}\right] + y_0}$

Se $\mathbf{t = 0}$, $\mathbf{w = 0}$ e $\mathbf{y = 0 \Rightarrow y_0 = aK/(K^2 - 1)}$.

Para determinar t, substituem-se **x** e **y** pelos seus valores na equação (1).

$$t = \frac{a}{2v_h}\left[\frac{1-e^{-(K+1)w}}{K+1} + \frac{1-e^{-(K-1)w}}{K-1}\right]$$

Para obter a curva, faz-se variar **w** entre 0 e o infinito.