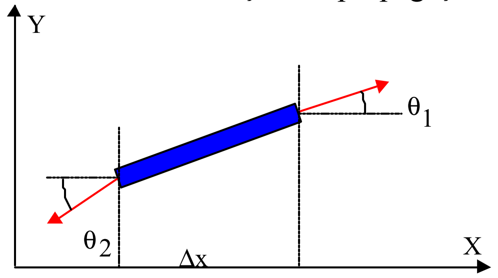
Regresso ao applet

Ondas a uma dimensão

Estudo analítico

Consideremos uma corda de massa linear μ, horizontal e em repouso. No instante $\mathbf{t = 0}$, transmite-se a uma porção da corda deslocamentos e velocidades transversais.
Estudemos a evolução e a propagação desta deformação ao longo do tempo. Se $\mathbf{T}$ é a tensão da corda, a força transversal que actua sobre o elemento de comprimento Δx é:



$$F_y = T.\text{sen}\theta_2 - T.\text{sen}\theta_1$$

Para os movimentos de pequena amplitude, o seno e a tangente podem ser confundidas:

$$F_y = T\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1}\right)$$

Um desenvolvimento de 2[e] ordem conduz a:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1} + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x$$

A aplicação do princípio fundamental da dinâmica no segmento Δx dá:

$$F_y = T\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$$

e há uma função de **x** e de **t**, T/μ com a dimensão do quadrado de uma velocidade; esta equação (equação onda) pode escrever-se:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

Esta equação admite, como solução geral:

$$y(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$$

$\mathbf{f_1(x + vt)}$ corresponde a um deslocamento para a esquerda da perturbação com uma velocidade v.
O mesmo $f_2(x - vt)$ corresponde a um deslocamento para a direita. Se $\mathbf{f_1(x)}$ corresponde à forma da corda no instante $\mathbf{t = 0}$, a forma no instante **t** obtém-se traduzindo a função $\mathbf{f_1(x)}$ para a esquerda da distância **vt**.
A solução no instante **t** depende então das ***condi-»es iniciais*** e nos limites:
Em $\mathbf{t = 0}$, a forma da corda é: $y(x, 0) = \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (1)

e $$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = v\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial t}\right) = v\left(f_1'(x) - f_2'(x)\right) = \phi(x)$$

Para integração desta relação temos: $\Phi(x) = v(f_1(x) - f_2(x))$ (2)
De (1) e (2), tiramos:

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}(\varphi(x) + \Phi(x)/v)$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2}(\varphi(x) - \Phi(x)/v)$$

A solução geral da equação de onda é então:

$$y(x, t) = \tfrac{1}{2}[\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt) + 1/v(\Phi(x + vt) - \Phi(x - vt))]$$

Caso particulares:
a) Se em $\mathbf{t = 0}$, a corda está imóvel $\phi(x) = 0$ et : $y(x, t) = \tfrac{1}{2}[\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)]$
b) Se a perturbação se propaga num só sentido, $f_1(x) = 0$ ou $f_2(x) = 0$.
Se, por exemplo, $f_1(x) = 0$ então $\varphi(x) = -\Phi(x)/v$ et $\phi(x) = -\,v.d\varphi(x)/dx$

Resolução numérica

Pode deduzir-se $y(x, t + \Delta t)$ de $y(x, t)$. Um desenvolvimento limitado a ordem 2 dá:

$$y(x,t+\Delta t) \approx y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\Delta t^2$$

Tendo em conta a equação de onda, temos:

$$y(x,t+\Delta t) \approx y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{v^2}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Delta t^2$$

Aproximamos da segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)}{\Delta x^2}$$

$$y(x,t+\Delta t) \approx y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{v^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)\right)$$

Da mesma forma:

$$y(x,t-\Delta t) \approx y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{v^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)\right)$$

Seja:

$$y(x,t+\Delta t) + y(x,t-\Delta t) \approx 2y(x,t) + \frac{v^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(y(x+\Delta x,t) + y(x-\Delta x,t) - 2y(x,t)\right)$$

Usando $a = v.\Delta t/\Delta x$, obtém-se:

$$y(x, t + \Delta t) = 2.y(x, t) + a^2[y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t)] - y(x, t - \Delta t)$$

$$y(x, t + \Delta t) = 2.(1 - a^2).y(x, t) + a^2[y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t)] - y(x, t - \Delta t)$$

Para introduzir as ***condi-»es nos limites***, é pssível ver que se as duas extremidades da corda são fixas, então $y(0) = y(L) = 0$. Se uma extremidade está livre, então esta extremidade é $(\partial y/\partial x) = 0$. Para traduzir o facto que a inclinação da corda é nula, é necessário escrever apenas que dois segmentos de corda consecutivos têm o mesmo deslocamento.

Estudo numérico da propagação de uma perturbação

A corda de comprimento **L** é dividida em ***n*** *segmentos id°nticos*: podemos assumir $\Delta x = 1$. O aspecto da corda poderá ser representada por uma matriz contendo as ordenadas de cada **n** segmentos.

Suponha a corda inicialmente em repouso $\Rightarrow$ $\phi(i) = 0$ $(0 \leq i \leq n+1)$

Consideremos que a deformação inicial é uma gaussiana centrada no segmento i_0 da corda de equação $\varphi(i) = y(i, 0) = A.\exp[-B(i - i_0)^2]$ $(0 \leq i \leq n+1)$ seja uma deformação em triângulo centrada também em i_0.

Em **t = 1**, calcula-se o aspecto da corda que é dado pela relação:

$$y(i, 1) = \varphi(i) + \phi(i) + ½.v^2.[\varphi(i + 1) + \varphi(i - 1) - 2.\varphi(i)] \; (1 \leq i \leq n)$$

De seguida faz-se variar o tempo impondo em permanência as condições nos limites: extremidade esquerda fixa $\{y(0, t) = 0\}$ e $y(n, t) = 0$ ou $y(n, t) = y(n + 1, t)$ dependo da extremidade direita da corda é fixa ou livre.

Para isso, escreve-se:

$$y(i, t + 1) = 2(1 - v^2)y(i, t) + v^2.[y(i + 1, t) + y(i - 1, t)] - y(i, t - 1)$$

A forma da corda no tempo **t + 1** é função da sua forma no tempo **t** e **t-1**: é necessário utilizar três tabelas y0(i) para **t-1**, y1(i) para **t** e y2(i) para **t + 1**. A cada passo do cálculo, as duas primeiras tabelas são actualizadas com os valores das duas últimas y0(i) = y1(i) e y1(i) = y2(i).

Regresso ao applet