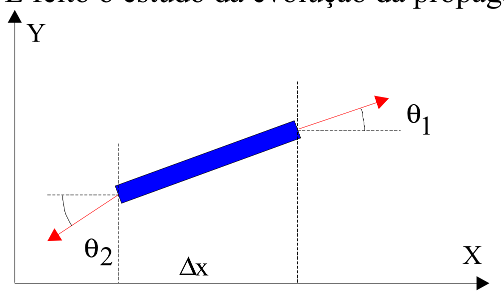
Regresso ao applet

Experiência de Melde

Estudo analítico

Considere-se uma corda de massa linear μ, horizontal em repouso. No instante $\mathbf{t = 0}$, são dadas a uma porção da corda, deslocamento e velocidades transversais.
É feito o estudo da evolução da propagação desta deformação ao longo do tempo. Se $\mathbf{T}$ é a tensão da corda, a força transversal que age sobre o elemento de comprimento, Δx é:



$$F_y = T.\text{sen}\theta_2 - T.\text{sen}\theta_1$$

Para os movimentos de reduzida amplitude, é possível que se confundam o seno e a tangente:

$$F_y = T\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1}\right)$$

Um desenvolvimento de 2ª ordem leva a:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x1} + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x$$

A aplicação do princípio fundamental da dinâmica no segmento Δx dá:

$$F_y = T\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{d^2y}{dt^2}$$

e existe uma função de x e de t, T/μ, com a dimensão do quadrado de uma velocidade, em que esta equação (equação de onda) se escreve:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}} \quad (1)$$

Esta equação admite como solução geral:

$$y(x, t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$$

$\mathbf{f_1(x + vt)}$ corresponde a um deslocamento para a esquerda da perturbação com uma velocidade $\mathbf{v}$.
$\mathbf{f_2(x - vt)}$ corresponde a um deslocamento para a direita. Se $f_1\mathbf{(x)}$ corresponde à forma da corda no instante $\mathbf{t = 0}$, a forma no instante $\mathbf{t}$ obtém-se transladando a função $\mathbf{f_1(x)}$ para a esquerda da distância $\mathbf{vt}$. A solução no instante $\mathbf{t}$ depende então das condições iniciais e dos limites.

Oscilações forçadas sinusoidais

Neste caso, as condições nos limites são: $Y(0,t) = A\text{sen}(\omega t)$ e $Y(L,t) = 0$ (extremidade fixa)
Deduz-se, então, a solução:

$$Y(x,t) = A\frac{\text{sen}[k(L-x)]}{\text{sen}(kL)}\text{sen}(\omega t) \quad \text{com } k = \omega/v$$

Seja $\omega_0 = \pi v/L$ a frequência fundamental de vibração da corda.
Quando ω é múltiplo inteiro de ω_0, a corda apresenta um sistema de <u>nós estacionários</u> e de <u>ventres de amplitide infinita</u>.
Fisicamente esta solução é inaceitável.
Para um sistema mais realista, é possível introduzir um amortecimento do tipo viscoso na equação de onda, que é a seguinte:

$$\boxed{v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + f\frac{\partial y(x,t)}{dt}} \quad (2)$$

Esta equação não é solúvel numericamente.

Resolução numérica

A corda de comprimento **L** é dividida em ***n*** *segmentos id°nticos.* O aspecto da corda poderá ser representado por uma tabela contendo as ordenadas de cada um dos ***n*** segmentos.

Seja **h = L/n** o espaço espacial e dt o espaço temporal. Temos **x = i.h** e **t = j.dt** (**i** e **j** inteiro).

Limitando-se à primeira ordem, as relações de Taylor dão para o ponto de abscissa **x** e no momento **t**:

$$\partial Y/\partial x = [Y(x+h,t) - Y(x-h,t)]/2h$$

$$\partial^2 Y/\partial x^2 = [Y(x+h,t) - 2Y(x,t) + Y(x-h,t)]/h^2$$

$$\partial Y/\partial t = [Y(x,t+dt) - Y(x,t-dt)]/2dt$$

$$\partial^2 Y/\partial t^2 = [Y(x,t+dt) - 2Y(x,t) + Y(x,t-dt)]/dt^2$$

Estes valores são introduzidos na relação (2). Esta equação permite encontrar para todos os pontos **x** o valor de **Y(x, t)** em função dos valores anteriores.
A forma da corda no momento <u>**t + 1**</u> é função da sua forma no momento <u>**t**</u> e <u>**t – 1**</u>:

É necessário utilizar três tabelas **y0(i)** para t – 1, **y1(i)** para t e **y2(i)** para t + 1. A cada passo do do cálculo, as duas primeiras tabelas são actualizadas com os valores das duas últimas.
y0(i) = y1(i) e **y1(i) = y2(i)** para ($1 \le i \le n+1$).
Se temos: **a = f.dt/2**, **b = (1 - a)/(1 + a)**, **e = (c*dt/h)^2**, a equação (2) vem:

y2[i] = - y0[i].b + (y1[i + 1] + y1[i - 1]).e/(1 + a) + 2.(1 - e).y1[i]/(1 + a);

Supõe-se que a corda, inicialmente em repouso, $\Rightarrow$ y2(i) = 0 para ($1 \le i \le n+1$).
Faz-se, em seguida, variar o tempo impondo que as condições nos limites se mantenham: extremidade esquerda y(0, t) = A.sen(ω.t) e extremidade direita y(L, t) = 0.

Quando nos aproximamos de uma condição de ressonância, a amplitude dos ventres cresce mas mantém-se finita.
Contrariamente ao caso sem atrito, constata-se que não existem (de acordo com a experiência) nós estacionários. Os nós deslocam-se da esquerda para a direita (se o vibrador está à esquerda).
Este modelo com atrito viscoso mostra bem os fenómenos observados.
Inicialmente, a energia fornecida pelo vibrador excitador faz aumentar a amplitude dos ventres de vibração e, consequentemente, a energia dissipada pelo atrito. Em regime permanente, a energia fornecida por um vibrador compensa a energia dissipada pelos atritos.

Regresso ao applet