Regresso ao applet

Oscilações amortecidas

Para este estudo, consideramos um pêndulo de torção, com momento de inércia **I**; a constante de torção do fio é **C**. Para este pêndulo, pode analisar-se analiticamente o caso do atrito viscoso e o caso do atrito sólido.

Atrito viscoso

O momento das forças de atrito é proporcional à velocidade angular e de sinal oposto.

A equação do movimento é: $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+F\dfrac{d\theta}{dt}+C\theta=0$.

A equação característica desta equação é: $Ir^2+Fr+C=0$.

Com λ =F/2I e $\omega_0{}^2$ = C/I.

A equação característica é: $r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$.

Segundo o sinal discriminate $\Delta=4(\lambda^2-\omega_0^2)$ consideram-se três casos.

Movimento oscilatório amortecido:

Este caso corresponde a amortecimentos fracos ($0<\lambda<\omega_0$.)

Temos: $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$

A equação caracterísitca admite as duas raízes complexas:

$$r_1=-\lambda+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}=-\lambda+i\omega \quad \text{et} \quad r_2=-\lambda-i\omega$$

A solução geral pode escrever-se na forma: $\theta=Ae^{-\lambda t}.\cos(\omega t-\varphi)$

A e φ são duas constantes que dependem das condições iniciais.

O movimento é oscilante amortecido. A duração que separa duas passagens sucessivas do pêndulo pela sua posição de equilíbrio no mesmo sentido é o pseudo-período $\mathbf{T=2\pi/\omega}$ do pêndulo.

Este período é função do amortecimento mas, o efeito é relevante apenas para valores de amortecimento que proporcionam uma dimimuição rápida de amplitude.

A relação entre dois alongamentos máximos sucessivos num mesmo sentido, é constante e igual a $e^{\lambda T}$.

Movimento aperiódico

Este caso corresponde aos amortecimentos fortes ($\lambda>\omega_0$.)

A equação característica admite as duas raízes reais negativas:

$$r_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$$

A solução geral pode escrever-se na forma: $\theta=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}$.

A e **B** são duas constantes que dependem das condições iniciais.

Como r_2 é mais pequeno que r_1, o termo em r_2t decresce mais rapidamente e ao fim de algum tempo a variação do ângulo varia Ae^{r_1t} . O regresso à posição de equilíbrio é mais lento quanto mais forte for o amortecimento.

Amortecimento crítico

Este caso corresponde a um discriminante nulo ($\lambda=\omega_0$).

A equação característica admite a raíz dupla $r=\lambda$.

A solução geral pode escrever-se na forma: $\theta=(At+B)e^{-\lambda t}$

A e **B** são duas constantes dependentes das condições iniciais.

Como θ é função decrescente, o pêndulo regressa à sua posição de equilíbrio sem passar nela.

Este regresso é sempre mais rápido para um movimento aperiódico.

Atrito sólido

O momento das forças de atrito é constante e de sinal oposto à velocidade angular

A equação do movimento é: $I\frac{d^2\theta}{dt^2}+C\theta+\varepsilon F=0$ $\quad \varepsilon=+1 \text{ si } \frac{d\theta}{dt}<0$, $\quad \varepsilon=-1 \text{ si } \frac{d\theta}{dt}>0$

Com $\omega^2 = C/I$ et $F = C\theta_f$. (θ_f é uma constante com a dimensão de um ângulo).

A equação do movimento é: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta+\varepsilon\omega^2\theta_f=0$

O fio de ângulo θ_0 é torcido e lança-se o pêndulo sem velocidade inicial. A velocidade angular cresce e a equação do movimento é: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2(\theta-\theta_f)=0 \Rightarrow \frac{d^2(\theta-\theta_f)}{dt^2}+\omega^2(\theta-\theta_f)=0$

A solução é: $\theta=\theta_f+A\cos(\omega t-\varphi)\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t-\varphi)$

Em t = 0, a velocidade angular sendo zero, φ é nulo.

Em t = 0 $\theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \theta_f + A$

Finalmente $\theta=\theta_f+(\theta_0-\theta_f)\cos(\omega t)\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-(\theta_0-\theta_f)\omega\sin(\omega t)$

O pêndulo pára quando a velocidade se anula para $\omega t = \pi$.
Este instante é escolhido como a nova origem do tempo.
O ângulo de rotação tem o valor $\theta_1 = -\theta_0 + 2\theta_f$.
O pêndulo reinicia o movimento com uma velocidade negativa.

A equação do movimento é: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2(\theta+\theta_f)=0$

A solução é: $\theta=-\theta_f+A\cos(\omega t-\varphi)\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t-\varphi)$

Em t = 0, a velocidade angular sendo nula, φ é nulo.

Em t = 0 $\theta = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = -\theta_f + A$

Finalmente $\theta=-\theta_f-(\theta_0-3\theta_f)\cos(\omega t)$

O pêndulo pára de novo para $\omega t = \pi$. O ângulo de rotação é $\theta_2 = \theta_0 - 4\theta_f$.
O movimento é uma sucessão de semi-sinusoides de período constante $T = 2\pi/\omega$ não centrados na origem.
A amplitude das oscilações do pêndulo decresce linearmente, sendo a distância de um «período» igual a $\Delta\theta = 4\theta_f = 4F/C$.
O pêndulo pára quando a torção (função da amplitude) for inferior ao atrito (constante).
A posição final não é necessariamente a posição de equilíbrio. Esta depende muito das condições iniciais. Este é o motivo pelo qual é necessáiro eliminar os atritos sólidos nos instrumentos de medição.