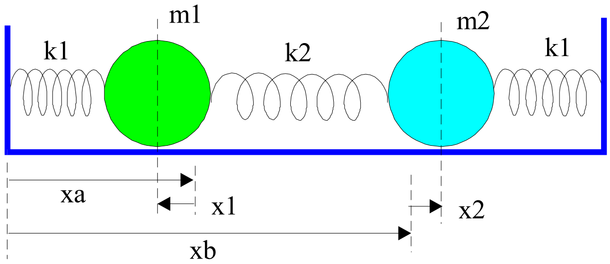
Sistemas acoplados



O mais simples dos sistemas acoplado é formado por duas massas $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$, podendo deslizar sem atrito num plano horizontal, e por duas molas de elasticidade $\mathbf{k_1}$. As duas massas são igualmente ligadas por uma mola com elasticidade $\mathbf{k_2}$.
As massas das molas são negligenciadas. As abscissas das posições de equilíbrio das massas são $\mathbf{x_A}$ e $\mathbf{x_B}$. Os deslocamentos das massas são $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$. O movimento das duas massas é descrito pelo sistema de equações lineares que se segue:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2)$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k_1}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1)$$

No caso geral, a resolução analítica deste sistema é complexa. Considere o sistema simplificado no qual as massas e as constantes das molas são idênticas e assuma $\alpha = k/m$.
Temos:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \alpha(2x_1 - x_2) = 0$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \alpha(2x_2 - x_1) = 0$$

Por analogia com o oscilador harmónico, assumimos que as soluções são da forma:

$$x_1 = A_1 e^{j\omega t} \quad \text{e} \quad x_2 = A_2 e^{j\omega t}$$

A introdução destas soluções no sistema anterior faz com que tenhamos:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\omega^2 + 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

A solução é única se o determinante da matriz for nulo: $\boldsymbol{\omega^4 - 4\alpha\omega^2 + 3\alpha^2 = 0}$. Esta equação admite as soluções: $\omega_1^2 = 3\alpha$ e $\omega_2^2 = \alpha$

A primeira conduz a $\alpha(A_1 + A_2) = 0$ com $A_1 = -A_2$ e a segunda a $A_1 = A_2$. Se o sistema oscila com a pulsação ω_1, a solução é <u>anti-simétrica</u>: $x_1 = Ae^{j\omega t}$ e $x_2 = -Ae^{j\omega t}$.

Para a segunda frequências, a solução é <u>simétrica</u> : $x_1 = Ae^{j\omega t}$ et $x_2 = Ae^{j\omega t}$

O sistema não poderá oscilar com uma frequência única com excepção para condições iniciais muitas particulares (encontre-as). No caso geral, a solução é uma combinação linear de soluções harmónicas de frequências ω_1 e ω_2 :

$$x_1(t) = +\, A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = -\, A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Pulsações:

Suponha que os dois osciladores estão fracamente acoplados e que as suas frequências próprias são próximas. As condições iniciais são escolhidas para anular φ_1 e φ_2.

Com $\Delta\omega = ½|\omega_1 - \omega_2|$ e $<\omega> = ½(\omega_1 + \omega_2)$, temos:

$$x_1(t) = 2A\cos(\Delta\omega t).\cos(<\omega>t)$$

A amplitude das vibrações de cada massa é modulada no tempo com a frequência $\Delta\omega$.
A frequência das vibrações é próxima de ω_1 e de ω_2. Este fenómeno é denominado «pulsação».
A integração numérica das equações permitem a determinação da solução do problema do caso geral.