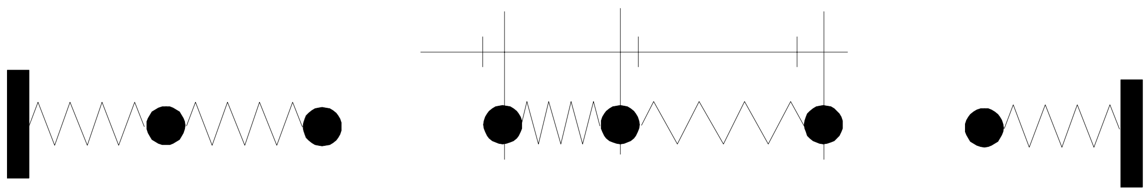
Regresso ao applet

Cadeia linear de osciladores

Considere-se uma cadeia de **N** massas idênticas, equidistantes, em repouso e ligadas por molas idênticas. Seja **m** a massa, **k** a elasticidade das molas e **a** a distância entre duas massas.



Equações do movimento

Cada massa $\mathbf{m_i}$ está fora da sua posição de equilíbrio à distância $\mathbf{x_i}$. Está submetida à acção das molas ligadas às massas $\mathbf{m_{i-1}}$ e $\mathbf{m_{i+1}}$.
A equação do movimento da massa $\mathbf{m_i}$ será então:

$$m.\ddot{x}_i + k(x_i - x_{i-1}) - k(x_{i+1} - x_i) \Rightarrow \ddot{x}_i = -\frac{k}{m}(x_i - x_{i-1}) + \frac{k}{m}(x_{i+1} - x_i)$$

Para a primeira massa, temos $\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1)$

E para a última $\ddot{x}_N = -\frac{k}{m}(x_N - x_{N-1}) - \frac{k}{m}x_N$

Temos $\mathbf{C = k/m = \omega_0^2}$.
$\boldsymbol{\omega_0}$ é a frequência (oscilação) do oscilador isolado.
A solução é da forma $x_i = A_i \cos(\omega t - \varphi_i)$
Se temos que a velocidade inicial de todas as massas é nula, a solução é: $\mathbf{x_i = A_i \cos(}\omega t)$
E, então: $\ddot{x}_i = -\omega^2 A_i \cos(\omega t)$.
Obtém-se um sistema de equações que pode ser escrito sob a seguinte forma matrial:

$$\begin{bmatrix} 2C & -C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -C & 2C & -C & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -C & 2C & -C & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -C & 2C & -C \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -C & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \\ \\ A_{N-1} \\ A_N \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \\ \\ A_{N-1} \\ A_N \end{bmatrix}$$

As frequências ω_i podem ser obtidas de modo próprio, procurando os valores próprios deste sistema.

Os valores das amplitudes para uma frequência própria dada, serão os componentes do vector próprio correspondente.

A solução será uma combinação linear de todos os modos próprios:

$$x_i = A_{1i}\cos(\omega_1 t) + A_{2i}\cos(\omega_2 t) + \cdots + A_{Ni}\cos(\omega_N t)$$

Os valores dos coeficientes $\mathbf{A_{ji}}$ são determinados a partir das condições iniciais.

Para valores pequenos de **N**, a procura de valores próprios pode ser feita manualmente. Para valores maiores, é necessário considerar uma diagonalização numérica.

Estido do caso N=3

A forma matricial do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 2C & -C & 0 \\ -C & 2C & 0 \\ 0 & -C & 2C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

A solução é:

Valores próprios ω^2	**Vectores próprios**
$2C\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	A_{11}, $\sqrt{2}A_{11}$, A_{11}
$2C = 2k/m = 2\omega_0^2$	A_{12}, 0, $-A_{12}$
$2C\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	A_{13}, $-\sqrt{2}A_{13}$, A_{13}

Os valores de $\mathbf{A_{11}}$, $\mathbf{A_{12}}$ e $\mathbf{A_{13}}$ são determinados a partir das condições iniciais.

Relação de dispersão

O movimento da massa i é regido por: $\ddot{x}_i = -\frac{k}{m}(x_i - x_{i-1}) + \frac{k}{m}(x_{i+1} - x_i)$

Se o sistema vibra segundo um modo próprio: $x_i = A_i \cos(\omega t)$ é a solução.

Introduzindo este valor na equação diferencial, obtemos uma relação recorrente entre as amplitudes:

$$A_{i+1} + A_{i-1} = A_i\left(2 - \frac{m}{k}\omega^2\right)$$

Procuram-se soluções sob a forma: $A_i = \sin\frac{pi\pi}{N+1}$, para <u>p inteiro e 0 < p < N+1</u>

Estas soluções respeitam as condições no limite: $A_0 = A_{N+1} = 0$

Temos: $\operatorname{sen}\frac{(p+1)i\pi}{N+1} + \operatorname{sen}\frac{(p-1)i\pi}{N+1} = \operatorname{sen}\frac{pi\pi}{N+1}\left(2 - \frac{m}{k}\omega^2\right)$

Depois da simplificação: $4\operatorname{sen}^2\frac{p\pi}{N+1} = \frac{m}{k}\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ com $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ou ainda: $\boxed{\omega = 2\omega_0 \operatorname{sen}\frac{p\pi}{N+1}}$

O comprimento total da cadeia de osciladores é $\mathbf{L = (N + 1)a}$.

Define-se o comprimentos de onda $\boldsymbol{\lambda = 2(N + 1)a/p}$ e um número de onda $\mathbf{K = 2\pi / \lambda = p\pi/(N + 1)a}$.

A relação de dispersão é:

$$\boxed{\omega = 2\omega_0 \operatorname{sen}\frac{Ka}{2}}$$

NOTAS: É possível, em alternativa à procura de valores próprios na matriz do sistema, utilizar a relação de dispersão para obter as frequências próprias, mas este método não dá os valores das amplitudes.

Assim, **para N = 3**, os valores de **Ka** que correspondem às posições das massas em repouso são $\pi/4$, $\pi/2$ e $3\pi/4$. Deduz-se que as frequências próprias são $0{,}7653\omega_0$, $1{,}414\omega_0$, $1{,}8477\omega_0$.

As frequências próprias estão compreendidas entre 0 e $2\omega_0$.