Regresso ao applet

Acoplamento de um pêndulo e uma massa

Uma massa **M** pode deslizar sem atrito sobre um plano horizontal. Suponha a massa ligada a um suporte fixo por uma mola de elasticidade **K**. Na massa **M** está acoplado um pêndulo simples de comprimento **l** e massa **m**. No equílibrio, a mola não está nem comprimida nem distendida. Esta posição corresponde à origem das abcissas. Seja θ o ângulo do pêndulo em relação à vertical.
Situa-se, no caso do ângulo θ#ser pequeno, entre (sen(θ) =θ, cos(θ) = 1)

Equa-»es do movimento :

Massa **M** : posição **x**, aceleração **x''** ;
Forças: Mg, mg, acção da mola –Kx, Reacção do plano horizontal.
Massa **m** : Posição **xm = x + lsen(θ) ≈ x + lθ ; ym = lcos(θ) ≈ l**
Acelerações **x'' + l.θ''** ; **y'' = 0**
A projecção das forças no eixo **Ox** permite escrever:

(M+m)x"+mlď"Kx=0

As forças que actuam sobre o pêndulo são o seu peso **mg** e a reacção desconhecida do suporte.
Para eliminar esta última, calcula-se o momento das forças em relação ao ponto de suspensão do pêndulo, na hipótese em que θ é pequeno.

$$-mgl\,\mathrm{sen}\,(\theta) = m\,(x'' + l\theta'')\,.\,l\cos(\theta)$$

$$x'' + l\theta'' + g\theta = 0$$

Resolu-«o das equa-»es do movimento:

$$(M+m)x'' + ml\theta'' + Kx = 0 \quad (a)$$

$$x'' + l\theta'' + g\theta = 0 \quad (b)$$

Consideremos as soluções harmónicas

$$x = A.\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\theta = B.\sin(\omega t + \varphi)$$

Substituindo x, x'', θ e θ'' pelos seus valores em (a) e (b), temos:

$$A\left(-(M+m)\omega^2 + K\right) + B\left(-ml\omega^2\right) = 0 \quad (c)$$

$$A\left(-\omega^2\right) + B\left(-l\omega^2 + g\right) = 0 \quad (d)$$

Este sistema admite a solução trivial A = B = 0. Não existem outras soluções no caso do determinante dos coeficientes ser nulo se:

$$Ml\omega^4 - \left((M+m)g + Kl\right)\omega^2 + Kg = 0$$

Esta equação tem duas raizes positivas tais que

$$\omega_1^2 < \omega_0^2 < \omega_2^2 \quad \left(\omega_0^2 = \frac{g}{l}\right)$$

A solução geral é, então:

$$x = A_1.\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2.\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta = B_1.\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2.\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

segundo (d) $\frac{A}{B} = \frac{g - l\omega^2}{\omega^2} \Rightarrow C_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{g - l\omega_1^2}{\omega_1^2}$ et $C_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{g - l\omega_2^2}{\omega_2^2}$

Para determinar os valores das constantes, utilizam-se as condições iniciais em:

$t = 0 \qquad x = x_0 \quad \theta = \theta_0 \quad x' = 0 \quad \theta' = 0$

Verifique que:

$$x = \frac{C_1(C_2\theta_0 - x_0)}{C_2 - C_1}.\cos(\omega_1 t) - \frac{C_2(C_1\theta_0 - x_0)}{C_2 - C_1}.\cos(\omega_2 t)$$

$$\theta = \frac{(C_2\theta_0 - x_0)}{C_2 - C_1}.\cos(\omega_1 t) - \frac{(C_1\theta_0 - x_0)}{C_2 - C_1}.\cos(\omega_2 t)$$