

Funções periódicas e séries de Fourier

Demonstra-se que toda a função **g(t)**, periódica de período **T** (de pulsação $\omega = 2\pi/T$ e frequência $f = 1/T$) satisfazendo determinadas condições de continuidade e de derivabilidade, pode ser decomposta numa soma de funções sinusoidais, dita **série de FOURIER**:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega n t + b_n \sin \omega n t)$$

$$\text{com : } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cdot \cos \omega n t \cdot dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cdot \sin \omega n t \cdot dt$$

Alguns exemplos úteis:

Função de janela simétrica: ($T = 2\pi$) :
$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi \cdot t}{(2n+1)}$$

Função triangular simétrica:
$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\pi \cdot t$$

Rampa:
$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi \cdot t$$

Onda sinusoidal rectificada:
$$g(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)}$$

Onda dupla sinusoidal rectificada:
$$g(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{(n+1)^2 - 1/4}$$

Pulso:
$$g(t) = \alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi \alpha \cdot \cos n\omega t}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2\pi \alpha) \cdot \sin n\omega t}{n}$$

Se a frequência da função **g(t)** é **f₀**, o termo de frequência **f₀** do desenvolvimento é denominado **fundamental**. O termo de frequência **n.f₀** é o **harmónico** de ordem **n**.

A **velocidade de convergência** da soma de Fourier em função do número de harmónicos é variável segundo a função estudada. Para os sistemas físicos reais, é necessário limitar o número dos hamónicos em função da largura de banda do dispositivo estudado.