Regresso ao applet

Ondas de forma limitada

Onda progressiva sinusoidal:

Uma onda sinusoidal infinita com uma dimensão pode ser representada pela equação:

$$\Psi = \Psi_0 \,\mathrm{sen}(\omega t - kx) \quad (1)$$

ω é a frequência, $k = 2\pi/\lambda$ o vector de onda; o quociente **$c = \omega/k$ é a velocidade de fase** da onda. Esta velocidade pode depender da frequência e podemos caracterizar esta dependência pela relação **$\omega = f(k)$** dita **relação de dispersão**.

Sobreposição de ondas sinusoidais de igual amplitude:

O tempo inicial é a soma de **n + 1** ondas cujos vectores de onda são distribuídos entre $k = k_1$ e $k = k_1 + \Delta k$. Se tivermos $k_0 = k_1 + \Delta k/2$, os vectores de onda são distribuídos entre $k_0 - \Delta k/2$ e $k_0 + \Delta k/2$.

Esta soma escreve-se: $$\Psi = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Psi_0}{n+1} \,\mathrm{sen}\left[-\left(k_1 + i\frac{\Delta k}{n}\right)x\right] \quad (2)$$

E o seu valor é: $$\Psi = \frac{\Psi_0}{n+1} \frac{\mathrm{sen}(n+1)\frac{\Delta k}{2n}x}{\mathrm{sen}\frac{\Delta k}{2n}x} \,\mathrm{sen}(-k_0 x) \quad (3)$$

(Para efectuar este cálculo, use notação imaginária e reconheça uma progressão geométrica.)

Como n tende para o infinito, temos: $$\Psi = \Psi_0 \frac{\mathrm{sen}\frac{\Delta k}{2}x}{\frac{\Delta k}{2}x} \,\mathrm{sen}(-k_0 x) \quad (4)$$

No instante inicial, obtém-se um «pacote» cujo «comprimento» no domínio espacial é da ordem de $1/\Delta k$ (observe o applet para ver a sua representação).

> **Ao sobrepor uma infinidade de sinusoides de igual amplitude, cujos vectores de onda são distribuídos entre $k_0 - \Delta k/2$ et $k_0 + \Delta k/2$, obtém-se uma onda de forma limitada a $1/\Delta k$ em ambos os lados da origem.**

Propagação de um pacote de onda:

Façamos as hipóteses simplificadoras seguintes:

a) Δk é muito pequeno comparativamente com k_0

b) a curva de dispersão é derivável próximo de $k = k_0$.

Pode escrever-se: $$\omega - \omega_0 = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} (k - k_0) = V_G (k - k_0)$$

V_G, que tem a dimensão de uma velocidade, é a **velocidade de grupo**.

Neste applet estudam-se os 3 casos seguintes:

$\omega = c.k$ (para $k = k_0$, $V_G = \omega_0/k_0 = c$, sem dispersão)

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \text{ (para } k = k_0,\ V_G = 2c)$$

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{1/2} \quad \text{(para } k = k_0,\ V_G = c/2\text{)}$$

Faz-se, no instante **t**, a soma de **n + 1** sinusoides.

Como componente de índice i, vem $k = k_1 + i\Delta k/n$ e $\omega = \omega_0 + V_G\left(-\frac{\Delta k}{2} + i\frac{\Delta k}{n}\right)$

No instante **t**, a forma do pacote de onda é dada por:

$$\Psi = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Psi_0}{n+1} \mathrm{sen}\left[\omega_0 t - V_G \frac{\Delta k}{2} t - k_1 x + i\frac{\Delta k}{n}\left(V_G t - x\right)\right]$$

Por generalização das relações (3) e (4), tiramos:

$$\Psi = \Psi_0 \frac{\mathrm{sen}\frac{\Delta k}{2}\left(x - V_G t\right)}{\frac{\Delta k}{2}\left(x - V_G t\right)} \mathrm{sen}(\omega_0 t - k_0 x)$$

O pacote desloca-se à velocidade $\mathbf{V_G}$.

Nota: devido à assimilação da curva de dispersão de uma recta, não é observada neste caso o escalonamento do pacote de onda ao longo da propagação.

Regresso ao applet