Regresso à simulação

Distribuição de Poisson

Definições

Série de estatística:

Realizam-se n experiências sucessivas durante as quais se registam os valores $x_1, x_2 ... x_k$. (por exemplo número de partículas recebidas durante uma contagem). Se as repetições (número de vezes que um valor se repete) $n_1, n_2 ... n_k$ são variáveis de uma série de medições, então o conjunto dos valores n_i constituem uma série estatística com a variável discreta x. Temos sempre:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Probabilidade, frequência, moda:

$p_i = n_i / n$ representa a probabilidade de o evento assumir o valor x_i numa sequência de experiências. Podemos assim observar a frequência f_i. A moda é o valor mais provável para o número de eventos.

Valor esperado, esperança matemática ou média:

A esperança matemática de um evento x define-se por:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i - p_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i n_i}{n}$$

Para uma variável discreta $E(x)$ é semelhante a uma média e será notada como $\overline{x}$.

Variância, desvio padrão:

A variância é a esperança matemática de grandeza $(x-m)^2$.

$V = E_{(x-m)^2} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m)^2 - p_i$. O desvio padrão é $\sigma = \sqrt{V}$

Modelos probabilísticos

Para representar uma distribuição de probabilidade $p(x)$, existem vários modelos. O de Poisson e o de Gauss são as distribuições assimtópticas da distribuição binomial.

Distribuição binomial:

Seja *p* a probabilidade de um evento considerado. 1 - p representa a probabilidade para que um evento não se realize. A probabilidade para que o evento se realize q vezes sucessivamente é p^q. Se realizamos $n(n > q)$ medições sucessivas, a probabilidade de que durante as $(n-q)$ últimas medições, o evento em causa não ocorra é portanto igual a $(1-p)^{n-q}$.
$p^q.(1-p)^{n-q}$ representa a probabilidade de termos eventos que ocorram durante as primeiras medições n consideradas. Existem C_n^q ormas de escolher a ordem de aparição dos q eventos por entre as n medições e a probabilidade de encontrar q eventos durante uma série de n medições é então:

$$P_n(q) = C_n^q.p^q(1-p)^{n-q} \text{ (distribuição binomial)}$$

A esperança matemática é então:

$$E(q) = \overline{q} = \sum_{q=0}^{n} qp_n(q) = n.p$$

A variância é:

$$V = n\overline{\sum_{q=0}}(q-m)^2.P_n(q) = n.p(1-q)$$

Distribuição de Poisson:

Se n <u>for grande o suficiente</u> e p <u>pequeno o suficiente</u>, a expressão da distribuição binomial é:

$$P_n(q) = \frac{1}{q!}(np)^q\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{q-1}{n}\right)(1-p)^{n\left(1-\frac{q}{n}\right)} \approx \frac{(np)^q}{q!}(1-p)^n$$

Or $(1-p)^n = 1 - np + n(n-1)\dfrac{p^2}{2!} - n(n-1)(n-2)\dfrac{p^3}{3!} + ... \approx e^{-np}$

Se $p \ll n$ a distribuição binomial escreve-se da seguinte forma aproximada:

$$p_n(q) = \frac{(np)^q}{q!} e^{-np} = \frac{m^q}{q!} e|^{-np}$$

Substituindo q por x, obtemos a distribuição de Poisson:

$$P(x) = \frac{m^x.e^{-m}}{x!}$$

Esta curva é assimétrica em relação à reta $x = m$.
Para $P \ll 1$, a expressão da variância é $V = np$. Esta é igual à variância e $\sigma = \sqrt{m}$

Distribuição de Gauss:

Se n for muito grande, mostramos que:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$$

que é uma curva simétrica em relação a $x = m$. (curva em sino)

Regresso à simulação